数理解析研究所講究録
1162 巻 2000 年 29-35

非線形クラインゴルドンおよびシュレディンガー方程式のエネルギー空間での散乱

東京大学大学院数理科学研究科　　中西賢次* (Kenji Nakanishi)

この話では以下の形の非線形クラインゴルドン方程式 (NLKG)および非線形シュレディンガー方程式 (NLS)を考える.

$$\ddot{u}-\Delta u+u+f(u)=0, \tag{NLKG}$$

$$i\dot{u}-\Delta u+f(u)=0. \tag{NLS}$$

ここで $u(t,x):\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{C}$ は未知関数、$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は $f(0)=0$ を満たす関数とする. 任意の関数 $u(t,x)$ に対して、

$$\mathbf{u}:=\begin{cases}(u,\sqrt{1-\Delta}^{-1}\dot{u}), & (\text{NLKG の場合})\\ u, & (\text{NLS の場合})\end{cases}$$

とすると、各方程式は次のエネルギーを保存量とする.

$$E(u;t):=\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\mathbf{u}|^2+|\mathbf{u}|^2+F(u)dx=E(u;0).$$

但し、このために非線形項 f に次の条件が必要となる.

$$^{\exists}F:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\quad \text{s.t. } \partial_{\bar{z}}F(z)=f(z),\quad F(0)=0 \tag{H0}$$

$$f(u)\bar{u}\in\mathbb{R}\qquad (\text{NLS の場合}). \tag{H1}$$

ここで考えることは、上の方程式に対する任意のエネルギー有限な解について、その時間大域的な挙動を調べることである. 以下、方程式の左辺を $eq(u)=eq_L(u)+f(u)$ と書く. u,v を $eq(u)=0=eq_L(v)$ かつ

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|_{H^1}=0,$$

を満たすものとすると、波動作用素は $W:\mathbf{v}(0)\mapsto\mathbf{u}(0)$ で定義される.

目標 我々の目標は、この波動作用素がエネルギー空間 H^1 上の全単射となること（漸近完全性）である. これは時刻無限大では線形の解と非線形の解が1対1に対応して近似できるということで、直観的には波動の拡散により $|u|$ が小さくなるので、高次項 $f(u)$ はやがて効力を失うということである. 線形の解についてはそのような性質を示すのは（我々が考える場合では）易しいが、非線形の大きな解についてどうやって示すかが問題となる.

*現住所：神戸大学理学部数学科, e-mail:kenji@math.kobe-u.ac.jp

$\boxed{\text{既知の結果}}$ エネルギー空間での漸近完全性について、従来知られていた最良のものは次の形である (cf. [3]) : 空間次元 $n \geq 3$ で、(H0), (H1), 及び次の (H2), (H3) を仮定すると漸近完全性が成り立つ.

$$\begin{gathered}|f(u) - f(v)| \leq C|u - v|(|u|^{p_1} + |v|^{p_1} + |u|^{p_2} + |v|^{p_2}),\\ 4/n < {}^{\exists}p_1 < {}^{\exists}p_2 < 4/(n-2),\end{gathered} \tag{H2}$$

$$\partial_{|z|}V(z) \geq C\min(|z|^{-1}, |z|^{p_3}), \quad {}^{\exists}p_3 > 0, \tag{H3}$$

ただし $V(u) := F(u)/|u|^2$. (H3) は非線形ポテンシャル $V(u)$ が $u \sim 0$ の付近では少なくとも多項式オーダーで、$u \sim \infty$ の付近では少なくとも対数オーダーで増大することを要求している. これに対して我々の結果は次のものである.

$\boxed{\text{主結果}}$ 任意の空間次元 $n \in \mathbb{N}$ で、(H0), (H1), (H2) 及び次の (H4) を仮定すれば漸近完全性が成り立つ.

$$\partial_{|z|}V(z) \geq 0. \tag{H4}$$

これは $V(u)$ が $|u|$ に対して非減少であることのみ要求している.

$\boxed{n \leq 2 \text{ での困難}}$ ① 漸近完全性を示すための出発点となる Morawetz 評価が示せない. ここで Morawetz 評価とは次の形の評価である.

$$\iint_{\mathbb{R}^{1+n}} \frac{G(u)}{|x|} dxdt \leq CE(u),$$

ただし $n \geq 3$, $G(u) := \partial_{|u|}V(u)|u|^3$. この評価から次の極めて弱い減衰が得られる.

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{|x|<|t|} G(u)dx = 0.$$

エネルギー空間の解について成り立つ減衰性の評価としては、Morawetz 評価しか知られていない.

② Free propagator の 減衰オーダー $t^{-n/2}$ が $n \geq 3$ でしか可積分とならない. $n \geq 3$ の場合は、このことを使うと例えば (NLS)では積分方程式

$$u = v + \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)} f(u(s))ds$$

において $s < t - L$ での積分は

$$\left\| \int_0^{t-L} \cdots ds \right\|_{L^\infty} \leq \int_0^{t-L} |t-s|^{-n/2} \|f(u(s))\|_{L^1} ds \leq CL^{-n/2+1},$$

として L を大きくとればいくらでも小さくすることができて、話を $t-L$ 以降の時間だけに限ることができるが、2次元以下ではこのような論法は通用しない．

我々は、①の困難については新しい Morawetz 型の評価を導出することで解決する．さらに、Bourgain の「集約エネルギー分離」の考え方を用いた新しい証明法では②のような困難は顕れない．

新しい Morawetz 型評価　Morawetz 型評価は Lagrangian の対称性に関連した恒等式を積分することで得られる．そのためにまず記号を導入する．

$$\langle a,b\rangle := \Re(a\bar{b}),\quad \partial=(\partial_t,\nabla),\quad \mathcal{D}:=\begin{cases}(-\partial_t,\nabla), & (\text{NLKG の場合})\\ (-i/2,\nabla), & (\text{NLS の場合})\end{cases},$$

$$2\ell(u):=\begin{cases}-|\dot{u}|^2+|\nabla u|^2+|u|^2+F(u), & (\text{NLKG の場合})\\ \langle i\dot{u},u\rangle+|\nabla u|^2+F(u), & (\text{NLS の場合})\end{cases}.$$

作用素 $\mathcal{D}$ は Lagrangian 密度 $\ell(u)$ の変分で現れる：

$$\partial_v\ell(u)=\langle eq(u),v\rangle+\partial\cdot\langle\mathcal{D}u,v\rangle.$$

この等式と、$\ell(u)$ の不変性を用いると次の公式が容易に得られる．$h:\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}^{1+n}$, $q:\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$, $M:=h\cdot\mathcal{D}u+qu$ とすると、

$$\begin{aligned}\langle eq(u),M\rangle = &-\partial\cdot\langle\mathcal{D}u,M\rangle+\Re\mathcal{D}\cdot(h\ell(u)+|u|^2\partial q)\\ &+\langle\mathcal{D}u,(\partial h)\mathcal{D}u\rangle-|u|^2\Re\mathcal{D}\cdot\partial q\\ &+(4q-\Re\mathcal{D}\cdot h)\ell(u)+G(u)q.\end{aligned}$$

そこで $h=(t,x)/|(t,x)|$, $q=\Re\mathcal{D}\cdot h/4$ として、上の恒等式を時空で積分してエネルギーの有界性を使うと次が得られる．但しここで (H4) を使う．

$$\iint_{\langle x\rangle<|t|}\frac{|t\nabla u+x\dot{u}|^2}{|t|^3}dxdt\le CE(u),\qquad (\text{NLKG の場合})$$

$$\iint_{1<|t|}\frac{|t\nabla u+ix/2u|^2}{|t|^3}dxdt\le CE(u),\qquad (\text{NLS の場合})$$

この被積分関数は $\langle\mathcal{D}u,(\partial h)\mathcal{D}u\rangle$ から来ている．これに Sobolev 型不等式を適用することで、次の評価が得られる．任意のエネルギー有限の解 u と $2+4/n\le p\le 2+4/(n-2)$ に対して、

$$\iint_K\frac{t^2|u|^p}{|(t,x)|^3}dxdt\le CE(u)^{p/2}.\qquad (\text{NM})$$

ただし、

$$K := \begin{cases} \{(t,x) \mid |x| < |t|\}, & (\text{NLKG の場合}) \\ \mathbb{R}^{1+n}, & (\text{NLS の場合}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{時空ノルムの評価}}$ これから必要となる時空ノルムを導入する．簡単のため、以下の話は (NLKG)では $n \le 2$ に限る．ただし、$n \ge 3$ でもノルムが変わるだけで、話の本質は変わらない．区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し、以下のように定義する．

$$\begin{aligned} &(E;I) = L^\infty(I; H^1(\mathbb{R}^n)), && (B;I) = L^\infty(I; B^{1-n/2-\sigma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)), \\ &(X;I) = L^q(I \times \mathbb{R}^n), && (K;I) = L^\rho(I; B^s_{\rho,2}(\mathbb{R}^n)), \\ &(\bar{K};I) = L^{\bar{\rho}}(I; B^s_{\bar{\rho},2}(\mathbb{R}^n)), \end{aligned}$$

ただし、$B^*_{*,*}$ は非斉次 Besov 空間、$\rho = 2 + 4/n$, $q = p_2(n+2)/2$, (NLKG)では $s = 1/2$, (NLS)では $s = 1$, $\sigma > 0$ は

$$0 < s\rho/q + (1 - n/2 - \sigma)(1 - \rho/q)$$

となるように小さくとる．この時、非線形評価

$$\||u|^{p_2}u\|_{(\bar{K})} \le C\|u\|_{(K)}\|u\|^{p_2}_{(X)},$$

及び補間不等式

$$\|u\|_{(X)} \le C\|u\|^{\rho/q}_{(K)}\|u\|^{1-\rho/q}_{(B)}$$

が成り立つ．

以降、$C(\cdot,\dots)$ は（それぞれ異なる）正値連続関数を表すとする．それらは全て具体的な関数で書くことができるが、簡単のために省略している．

$\boxed{\text{主評価}}$ 我々の目標は次の時空大域的な先験評価である．

$$\|u\|_{(X;\mathbb{R})} \le C(E(u)). \tag{GST}$$

この評価から漸近完全性は以下のようにして示される．$eq(u) = 0 = eq_L(v)$, $\mathbf{u}(T) = \mathbf{v}(T)$ とすると、Strichartz 評価より $I = (T, S)$ に対して

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{(K;I)} &\le C\|f(u)\|_{(\bar{K};I)} \\ &\le C\|u\|_{(K;I)}\|u\|^{p_2}_{(X;I)} + C\|u\|^{1+p_1(1-\alpha)}_{(K;I)}\|u\|^{p_1\alpha}_{(X;I)}, \end{aligned}$$

ただし $0 < \alpha < 1$ は p_1, p_2 から決まる定数．(GST) から同様な評価により $\|u\|_{(K;\mathbb{R})} \le C(E(u))$ も示すことができるので、$T \to \infty$ で $\|u\|_{(K;T,\infty)} + \|u\|_{(X;T,\infty)} \to 0$. これより、上の評価から u が線形の解に収束することが示せる．

$\boxed{\text{集約エネルギーの分離}}$ これは Bourgain [2] が $n=3,4$, $p=4/(n-2)$ (Sobolev critical) で (NLS)の球対称解について、大域存在と漸近完全性を示すために用いた論法である．まず、評価したい時空ノルム（今の場合 $\|u\|_{(X;\mathbb{R})}$）が極めて大きい場合を考える．この時、Morawetz 型評価を用いると、一定量のエネルギーが時空のどこかで、(周りと比べて相対的に) 極めて高密度に集約していることが示される．ここで、密度の高さは時空ノルムを大きくすることでいくらでも（相対的に）大きくなる．この高集約エネルギーに対応する波動成分を考えると、それは空間的局在化の効果によって、速やかに減衰することがわかる．すると残りの成分との間の相互作用は小さくなり、非線形項の影響が制御できるので、あたかも線形の場合のように、この集約波動を分離することができる．すると、残りの部分は集約エネルギーが取り除かれた分、元より一定量エネルギーが減っているので、この議論を繰り返すと最終的には十分小さなエネルギーの解に対する評価に帰着できる．しかしエネルギーが十分小さい場合は Strichartz 評価により容易に (GST) を導けるので、帰納法により、任意の大きさのエネルギーを持つ解について (GST) が示される．

残りの部分に帰着させるのは正確には次の補題を用いる．これは本質的には [2, pp. 162–163] の議論と同じである．

補題 1. $eq(u)=eq(w)=eq_L(v)=0$, $\mathbf{u}(0)=\mathbf{v}(0)+\mathbf{w}(0)$, $E(u),E(w)\le E$, $\|w\|_{(X;0,\infty)}\le M$ とすると、$\varepsilon\ge C(E,M)$ が存在して、$\|v\|_{(X;0,\infty)}\le\varepsilon$ ならば $\|u\|_{(X;,0,\infty)}\le C(E,M)$.

時空ノルムとエネルギー分布を対応付けるのが次の補題である．これは本質的には [2, Sect. 3] と同じものだが、Sobolev subcritical なために状況は少し簡単になっている．

補題 2. $eq(u)=0$, $E(u)=E$, 区間 I 上 $\|u\|_{(X;I)}=\eta>0$ とすると、$\eta_0\ge C(E)$ が存在して、$0<\eta\le\eta_0$ ならば、$X\in\mathbb{R}^n$, $R<C(E)$ が存在して、ある部分区間 $J\subset I$ における任意の時刻 t において任意の $p\ge 1$ に対し

$$\int_{|x-X|<R}|u|^p dx \ge C(E,\eta,p).$$

この補題で得られる X の周り半径 R 内が、エネルギー集約地点の候補だが、ここではまだそれがどれだけ集約しているかは何も言っていない．それは時空ノルムと Morawetz 評価についての大域的考察から初めてわかることである：

補題 3. $eq(u) = 0$, $E(u) = E$, 区間の列 $I_j = (T_j, T_{j+1})$ について $\|u\|_{(X;I_j)} = \eta$ は上の補題の条件を満たすとすると、

$$\sum_j \frac{1}{T_j - T_0} \le C(E, \eta).$$

もし時空ノルムが極めて大きいとすれば、上のような分割区間も沢山取れる．するとこの補題から、その部分区間の中に極めて長い区間があることがわかる．各区間内の時空ノルムは一定だから、そのような長い区間では時空ノルムの密度は極めて薄いことになり、一定半径 R 内に一定量のエネルギーが溜まっている所が相対的に極めて高集約とみなせる．このエネルギーの塊を取り出した波動が実際に、残りの成分とあまり相互作用しないうちに減衰してしまうことを示せば証明は終わる．以下では、補題2，3の証明の概略を述べる．

補題2の略証　v を区間 I の端で u と同じ初期値を持つ線形の解とすると Strichartz 評価より、

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{(K)} &\le C\|f(u)\|_{\bar{(K)}} \\ &\le C\|u\|_{(X)}^{p_2}\|u\|_{(K)} + C\|u\|_{(X)}^{p_1\alpha}\|u\|_{(K)}^{p_1(1-\alpha)+1},\end{aligned}$$

だから η が十分小さければ $\|u\|_{(K)} \le C(E)$. よって、補間不等式より

$$\eta = \|u\|_{(X)} \le C\|u\|_{(K)}^{\rho/q}\|u\|_{(B)}^{1-\rho/q} \le C(E)\|u\|_{(B)}^{1-\rho/q}.$$

従って $\|u\|_{(B)} \ge C(E, \eta)$. これは、$(B)$-ノルムの定義より、$T \in I$, $X \in \mathbb{R}^n$, $j \ge 0$ があって

$$|2^{(1-n/2-\sigma)j}(\varphi_j * u)(T, X)| \ge C(E, \eta) \qquad (※)$$

を意味する．ただし $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ は Littlewood-Paley の $\delta(x)$ の分解．ここで Sobolev 埋蔵 $H^1 \hookrightarrow B_{\infty,2}^{1-n/2}$ より $j < C(E, \eta)$, さらに

$$\|\varphi_j * (u(t) - u(s))\|_{L^\infty} \le C(j)\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}} \le C(E, \eta)|t - s|,$$

より、$|J| > C(E, \eta)$ の部分区間で (※) が成り立ち、$\varphi_j \in \mathcal{S}$ は $|x| > C2^{-j}$ で十分小だから Hölder より、半径 $R \le C(E, \eta)$ 内に $|u|$ が一定量溜まっていることが言える．

補題3の略証　各区間 I_j で補題2を適用すると、部分区間 $J_j \subset I_j$, $X_j \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ があって、$|J_j| > C(E, \eta)$, $R < C(E, \eta)$, かつ, $t \in J_j$ において

$$\int_{|X_j - x| < R} |u|^2(t)dx \ge C(E, \eta).$$

そこで $T_j := \inf J_j$, $B_j := \{(T_j, x) \mid |x - X_j| < R\}$, $K_j := \{(t, x) \mid t > T_j, |x - X_j| < M|t - T_j| + R\}$, $\tilde{K}_j := \{(t, x) \mid t \geq T_j, |x - X_j| < M|t - T_j| + 3R\}$, 但し $M < C(E, \eta)$ は (NLKG)では 1, (NLS)では K_j 内の L^2 ノルムが B_j にあった量の半分以上は失われないように大きくとる（一種の有限伝播性）．ここで、添字集合 $S \subset \{1, \ldots, N\} = U$ を次が満たされるように選ぶ.

(1) $\forall j \in S$, $\forall k \in S$, $j \neq k \Longrightarrow B_j \cap K_k = \varnothing$.

(2) $\forall j \in U$, $\exists k \in S$, $B_j \subset \tilde{K}_k$.

有限伝播性と (1) の条件より、$\#S \leq C(E, \eta)$. Morawetz 型評価 (NM) より、

$$C(E, \eta) \geq \sum_{k \in S} \iint_{\tilde{K}_k} \frac{|u|^2}{M|t - T_k| + R}$$

(2) の条件を使って右辺を評価すると、

$$C(E, \eta) \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{C(E, \eta) J_j}{M|T_j - T_0| + R} \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{C(E, \eta)}{|T_j - T_0|}.$$

□

References

1. J. Bourgain, *Scattering in the energy space and below for 3D NLS*, J. Anal. Math. **75** (1998), 267–297.
2. J. Bourgain, *Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 1, 145–171.
3. J. Ginibre and G. Velo, *Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein-Gordon and Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **43** (1985), 399–442.
4. C. Morawetz and W. Strauss, *Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 1–31.
5. K. Nakanishi, *Unique global existence and asymptotic behaviour of solutions for wave equations with non-coercive critical nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations, **24** (1999), 185–221.
6. K. Nakanishi, *Scattering theory for nonlinear Klein-Gordon equation with Sobolev critical power*, Internat. Math. Res. Notices **1999**, no. 1, 31–60.
7. K. Nakanishi, *Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2*, to appear in J. Funct. Anal.
8. K. Nakanishi, *Remarks on the energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations*, preprint.